

Командна олімпіада
з комп'ютерного експерименту СЕТО2019
Computer Experiment Team Olympiad

Січень 2019

[Реєструйтеся](#) та починайте розв'язувати задачі, наведені нижче, це буде цікаво!

Для всіх учасників діє технічна підтримка у [Slack](#), запрошення до чату надаються через зареєстрованих капітанів та керівників.

Захист робіт: 9 лютого 2019.

Київ, пр. Глушкова, 4г, факультет РЕКС КНУ імені Тараса Шевченка



СЕТО

1 Рибне життя

Через скорочення фінансування фундаментальних досліджень доктор Біодольський був вимушений взяти замовлення від приватного підприємства, ТОВ «Мегагриба», на розробку оптимального режиму розведення риби у садку. Зазвичай математичні моделі, які описують розвиток істот із сезонним розмноженням, у першому наближенні описуються дискретними відображеннями виду $x_{n+1} = f(x_n)$, де x_n — розмір популяції на n -му сезоні. За початкову точку свого дослідження доктор Біодольський обрав модель Рікера із відбраковуванням. Вона описується функцією відображення

$$f(x) = (1 - \gamma)x a^{1-x}.$$

Тут $0 < \gamma < 1$ — коефіцієнт відбраковування, $a > 0$ — керівний параметр (швидкість зростання популяції), а x — розмір популяції у певних одиницях. Канадський вчений Білл Рікер ввів його для опису ринку риболовлі у 1954 році.

Яка доля може спіткати хазяйство господаря залежно від значень a і γ ? Побудуйте графік кінцевого розміру популяції як функції від γ для різних значень a і зробіть висновки.

2 Модифікація гравітації

Команда космічного корабля під керівництвом капітана Зоріна, знаходячись біля невідомої планети, виявила, що рух корабля у полі тяжіння планети відрізняється від очікуваного. Швидкі виміри показали, що гравітаційна взаємодія не є ньютонівською, а сила взаємодії напрямлена вздовж радіус-вектора та дорівнює за модулем

$$F(r) = -\frac{k}{r^{2+\alpha}},$$

де $\alpha \ll 1$ — маленьке число, k — та сама константа, що фігурувала би у випадку звичайної ньютонівської гравітації. Параметри планети співпадають із параметрами Землі. Команді корабля для навігації у космосі необхідно обрахувати кілька базових навігаційних задач:

1. Нехай у початковий момент часу корабель знаходиться на орбіті, яка за умов немодифікованої гравітації є геостационарною (тобто корабель весь час знаходиться над тією самою точкою планети). Чи впаде він з цієї орбіти, якщо гравітація є модифікованою? Знайдіть час та кількість обертів до зіткнення з поверхнею планети як функцію константи α .
2. Знайдіть другу космічну швидкість як функцію константи α , тобто найменшу початкову швидкість, яку необхідно надати тілу аби воно вийшло за межі гравітаційного впливу планети.
3. *Опційно.* Якщо α — дуже мале число, то перший закон Кеплера про еліптичність орбіти буде виконуватись лише наближено, орбіта буде постійно

лежати в одній площині, проте параметри еліпса будуть повільно змінюватись з часом. Визначте, за яким законом обертається його більша напіввісь та як змінюються довжини напівосей з часом.

3 Бігова амеба

Доктор Біодольський вирішив прийняти участь у олімпійських іграх із селекції та генного інжинірингу OSGI-2019. Серед дисципліни для змагань він обрав перегони на виживання в категорії одноклітинних. Досліджуючи рух одного з перспективних спортсменів — амеб *Amoeba virtualius sprintius*, він визначив, що вони рухаються зі швидкістю 1 міліметр на хвилину та без джерела поживних речовин можуть активно рухатись T хвилин. За відсутності зовнішніх подразників напрямку руху вони обирають довільно і через свою непосидючість ніколи не сидять на місці. Він поставив ряд дослідів з руху амеби у одновимірній трубочці так, що вона могла рухатись тільки праворуч або ліворуч.

1. Знайдіть розподіл імовірностей за відстанями (тобто ймовірності того, що амеба загине на відстані x від початкової точки), вважаючи що амеба приймає рішення про напрямку руху кожену хвилину наново випадково. Як цей розподіл змінюється при зміні T ? Чи має він простий опис за великих значень T ?
2. На яку відстань вона буде відходити «в середньому»? Оскільки напрямки праворуч і ліворуч еквівалентні, то середнє відхилення тут буде нульове, тож треба рахувати корінь з середньоквадратичного відхилення.
3. Яка ймовірність для амеби за час T хоча б раз перетнути одну з «фінішних» ліній, розташованих в точках X та $-X$? Знайдіть розподіл кількостей «історій життя» амеб за часом першого перетину фінішної лінії.

4 Пробивний електрон

Електрон заряду e та маси m пролітає крізь прямокутну ґратку, утворену паралельними дротами нескінченної довжини, що розташовані на відстані a один від одного, через кожен з яких протікає струм I . В одному напрямку ґратка складається із M провідників, а в іншому (з якого залітає електрон) — із $N \ll M$. Траєкторія електрона у початковий момент часу лежить у площині, перпендикулярній до провідників.

1. Використовуючи закон Біо—Савара—Лапласа, запишіть рівняння Ньютона, що будуть описувати динаміку електрона. Розділивши його на масу, виділіть єдину константу, що характеризує взаємодію електрона із окремим провідником. Знайдіть, як треба відмасштабувати відстань і час, щоб позбутись від цієї константи та від константи a у рівняннях (перетворити їх на одиниці). Якщо тепер вважати, що електрони налітають з великої відстані, на якій провідники на них не діють, то можна вважати, що в

задачі є лише три параметри: модуль початкової швидкості електрона v , кут, який утворює вектор швидкості до лінії провідників θ та кількість шарів провідників N .

2. За яких значень початкової швидкості та кута входження електрона у систему його траєкторія залишається стабільною, і електрон виходить з іншого боку стінки з провідників, а за яких траєкторія стає хаотичною, і електрон «губиться» серед них?

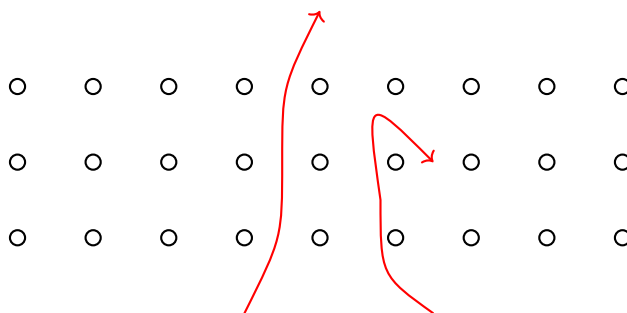


Рис. 1: Вигляд згори: дроти зі струмом і пролітаючі частинки.

Успіхів!

Наші ресурси:

- Сайт олімпіади: tolymp.knu.ua
- Телеграм-канал: [TeamOlymp](https://t.me/TeamOlymp)
- Чати технічної підтримки: cetows.slack.com