II командна олімпіада з комп'ютерного експерименту CETO 2019

Computer Experiment Team Olympiad

Вересень 2019

Олімпіада CETO — це застосування комп'ютерних методів обчислень у природничих науках та математиці. Ми пропонуємо поєднати досвід різних предметів та втілити його у коді для досягнення максимально ефективного результату. Так ви на власному досвіді відчуєте технології та підходи, які сьогодні застосовуються для вирішення практичних задач науки, бізнесу та технологій!

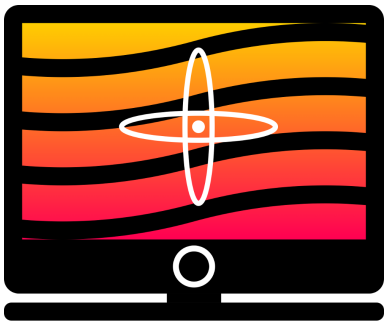
Реєструйтеся та починайте розв'язувати задачі, наведені нижче, це буде цікаво!

Наші ресурси:

- Сайт олімпіади: tolymp.knu.ua
- Телеграм-канал: TeamOlymp
- Чати технічної підтримки вказано після кожної із задач.

Захист робіт: **20 жовтня 2019**

Київ, пр-т Глушкова, 4г, факультет РЕКС КНУ імені Тараса Шевченка



CETO

1 Доба довгоствольної артилерії

Секретний полігон планети X було побудовано для випробовувань новітніх доробок, які працюють за старими принципами. Протягом листопаду за місцевим часом заплановано огляд можливостей гаубиці моделі CE-19, яка здатна вистрілювати снаряд масою m зі швидкістю v_0 під довільним кутом до горизонту. Фахівці зауважили, що планета X має досить щільну атмосферу й результати випробовувань можуть значно відрізнятись від лабораторних. Заздалегідь відомо, що сила опору, яка діє на снаряд, напрямлена протилежно до миттєвої швидкості й може бути записана як

$$F = kv^\beta,$$

де коефіцієнт β приймає різні значення в залежності від метеорологічних умов, а k, здебільшого, визначається характеристиками снаряду.

Для успішного проведення випробовувань потрібні артилеристські таблиці. Знайдіть залежність кута максимальної дистанції стрільби від параметрів сили опору.

Примітка. Величина k має параметричну розмірність. Слід проаналізувати, як можна вважати його фактичне значення для заданого снаряда незалежним від β.

Чат технічної підтримки в Телеграмі

2 Летючий цирк Монті

Після виснажливого робочого дня доктор Джон Кліз пішов на відпочинок до Летючого цирку Монті. В одному з номерів гімнастка Конні переходила між двома платформами по небезпечно еластичному тросу. Зачарований майстерністю гімнастки Джон рахував кожен її крок. Карколомний номер ускладнювався тим, як сильно розтягувався трос.

1. Як залежить висота на яку просідає трос від горизонтальної відстані від еквілібристки до початкової платформи?

2. Порахуйте кількість кроків необхідних для того аби артистка подолала відстань між платформами.

Наступний номер був не менш разючий. Конні з іншим гімнастом Томом на тому ж тросі синхронно йшли на зустріч один одному, зустрілись по середині, пройшли повз один одного, і дійшли до протилежних платформ. Джон і цього разу рахував кроки, а трос розтягувався ще більше.

3. Порахуйте і ви скільки знадобилось кроків артистам.

Для оцінки використовуйте наступну інформацію: Конні важить 50 кг та робила кроки по 30 см, Том важить 80 кг та робив кроки по 40 см. Відстань між платформами 10 м, довжина тросу до натягу 9 м. Його коефіцієнт пружності 250 Н/м. Також вважайте, що канат під ногами у гімнастів не проковзував.

Чат технічної підтримки в Телеграмі

3 Мирний атом

В рамках програми ООН по зниженню аварійності атомних станцій професору Сузірському замовили моделювання реакції ядерного розпаду в радіоактивних матеріалах.

Для оцінки порогу ланцюгової реакції він вирішив користуватись наступною спрощеною моделлю: матеріал являє собою двовимірну правильну прямокутну ґратку розміру $N \times N$ в вузлах якої на відстані d знаходяться радіоактивні атоми. У початковий момент часу ядро яке знаходиться в центрі зразку розпадається, і випромінює два надшвидких нейтронів у випадковому напрямку. Перше ж ядро до центра якого нейтрон наближається на відстань r захоплює його і саме розпадається з випроміненням пари нейтронів у випадкових напрямах. Якщо до жодного ядра нейтрон не наближається на таку відстань — він вільно пролітає крізь всю ґратку і втрачається. Захоплення нейтронів і розпади продовжується доти, доки всі нейтрони не вилетять за ґратку. Вважаючи що час прольоту нейтрона крізь ґратку набагато менше ніж час потрібний на захоплення і розпад ядра, знайдіть:

1. Як виглядає розподіл середньої кількості ядер, що залишається після того, як відбулись всі розпади й з ґратки вилетів останній нейтрон, від «густини ядер» — відношення r/d, якщо усереднювати по великій кількості експериментів (із різними випадковими кутами, але при фіксованому r/d)? Чи існує деяка «критична густина» до якої практично всі ядра залишаються цілими, а після якої — практично всі розпадаються? Як вона залежить від розміру ґратки?

2. У якій долі експериментів яка доля ядер виживає за фіксованої густини ядер? Якщо відповідь у попередньому пункті позитивна — розгляньте окремо випадки густини меншої за критичну, більшої за критичну та у «перехідному режимі». Результати зручно подати у вигляді гістограми.

3. *Додатково.* Створіть програму для візуалізації ходу експерименту.

4. *Додатково.* Що зміниться при аналізі тривимірної ґратки?

Чат технічної підтримки в Телеграмі

4 Як сума кубів

«Відомо, що будь-яке натуральне число може бути представлене у вигляді суми не більше чотирьох квадратів. Багато чисел можуть бути представлене як сума двох квадратів навіть не одним способом. А що відомо про куби? Цікавіше за все представляти натуральні числа як суму трьох кубів. Якщо дозволити кубам дозволити бути від'ємними, то існує гіпотеза, що "більшість" чисел має таке представлення, причому нескінченно багато.» — доповідав професор пан Слободан на лекції з теорії чисел.

Студенту другого курсу Непосидицькому було нудно слухати лекцію, тож він одразу взявся розширювати межі пізнаного людством. Він вирішив досліджувати властивості функції $a_3(n)$ — кількість способів представити число n у вигляді суми $x^3+y^3+z^3$, де $x, y, z \in \mathbb{N}$ — додатні цілі числа (представлення що відрізняються лише порядком доданків вважаються однаковими). Допоможіть йому реалізувати план досліджень.

1. Придумайте максимально швидкий алгоритм підрахунку функції $a_3(n)$. Знайдіть суму $a_3(n)$ для всіх $n \le 10\,000\,000\,000$.
2. Знайдіть мінімальне число n для якого $a_3(n) = 10$. Знайдіть n для якого $a_3(n) \ge 20$, $a_3(n) \ge 100$.
3. Знайдіть середнє значення $a_3(n)$ — межу $\frac{1}{n}\sum\limits_{k\le n} a_3(k)$ хоча б з точністю до 5-го знаку. Чи можете ви знайти цю границю аналітично? Що буде якщо розглядати суми не 3, а 2 чи 5 кубів?
4. *Додатково.* Спробуйте знайти як виглядає асимптотика функції $\sum\limits_{k\le n} k^q a_p(k)$ при великих n в залежності від параметрів q та p, якщо $a_p(k)$ — кількість способів подати число k у вигляді суми p кубів.

Чат технічної підтримки в Телеграмі

Успіхів!